L. Khnisse

A.S :2011/2012

Devoir de synthèse N°1

Durée: 2.h

Exercice N°1: (6 pts) (40 mn)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - 2Z + 1 - e^{4i\alpha} = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$

2/ On donne l'équation (E') : $Z^3 - (2+i)Z^2 + (2i + 1 - e^{4i\alpha})Z - i + i\,e^{4i\alpha} = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Vérifier que $z_0 = i$ est une racine de (E')

b) Déterminer deux nombres complexes c et d vérifiant :

$$Z^3 - (2+i)Z^2 + (2i + 1 - e^{4i\alpha})Z - i + i\,e^{4i\alpha} = (Z-i)(Z^2 + cZ + d)$$

c) Résoudre alors (E') dans $\mathbb{C}$

3/ Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé directe $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixe respectives $a = 1 + e^{2i\alpha}$ et $b = 1 - e^{2i\alpha}$; avec $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

a) Montrer que : $1 + e^{2i\alpha} = 2\cos\alpha\, e^{i\alpha}$ et $1 - e^{2i\alpha} = -2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$

b) Déduire la forme exponentielle des nombres complexes a , b et $\frac{a}{b}$

c) Montrer que pour tout α , OAB est un triangle rectangle en O

Exercice N°2: (5 pts) (30 mn)

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé, la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

- L'axe des abscisses une asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$
- ζ_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$
- Un point anguleux de coordonnées (3 , 2)

1/ Donner $f(3)$ et $f(5)$; Justifier que ζ_f admet au moins une tangente horizontale

2/ Déterminer les coordonnées de A point d'inflexion pour ζ_f et donner une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ_f en A

3/a) Donner : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left]-\infty, 3\right]$

a) Justifier que g réalise une bijection de $\left]-\infty, 3\right]$ sur un intervalle I que l'on précisera

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}, fonction réciproque de g à gauche en 2

c) Tracer $\zeta_{g^{-1}}$ dans le même repère

Exercice N°3 : (6 pts) (35 mn)

Soit f la fonction définie sur $\left]-1,1\right[$ par : $f(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Justifier que f est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et que : $f'(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que I(0 , - 1) est un point d'inflexion de ζ_f

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à ζ_f au point I

3/ Tracer ζ_f en précisant les asymptotes

4/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,1\right[$ sur un intervalle J à préciser

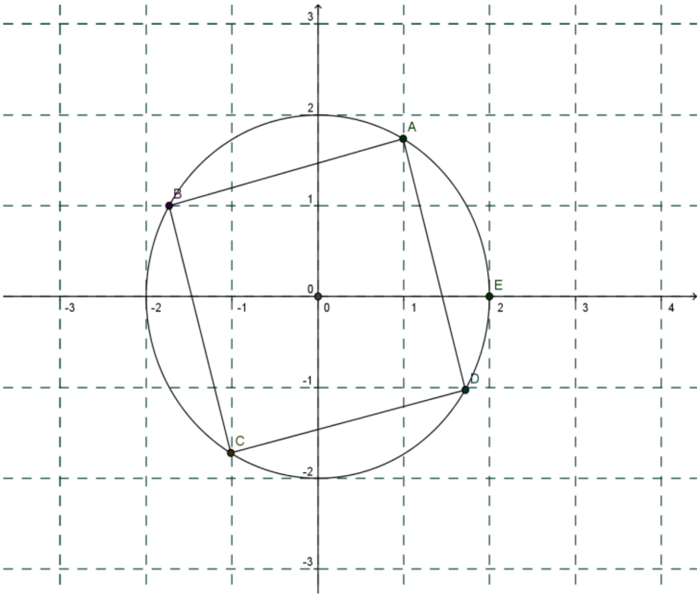
b) Calculer $(f^{-1})'(-1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

(Feuille annexe à rendre)

Nom et Prénom .... 4 sciences ..... N°......

<u>Exercice N°4 : (3 pts)</u>  (15 mn)



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

Soit ABCD un carré, OEA un triangle équilatéral

et ζ le cercle de centre O et de rayon 2

Pour chaque proposition une seule réponse est correcte

Entourer la bonne réponse

1/ L'affixe du point A est

c) $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ c) $Z_A = 1+\sqrt{2}$

2/ a) $Z_A + Z_C = 0$ b) $Z_A + Z_C = 2$ c) $Z_A . Z_C = -2$

3/ Les affixes des points A, B, C et D sont les solutions de l'équation :

a) $Z^4 = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $Z^4 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ c) $Z^4 = 16$

4/ Le nombre complexe $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est égale à :

a) 1   b) i   c) $-2i$

<u>Exercice N°2</u>